شمارش از چند طریق!

عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی ـ شیراز

اشاره

مسـائل زیر همگی دارای یک پاسخ درست هستند، اما به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که روش‌های رسیدن به پاسـخ درست از دست‌کم دو شیوهٔ متفاوت امکان‌پذیر اسـت. طرح چنین مسائلی در کلاس درس می‌تواند فرصتی برای دانش‌آموزان فراهم سازد تا با چالش در اطلاعات و مفاهیم آموخته شدهٔ خود، راه‌هایی متفاوت و همراه با نوآوری را تجربه کنند.

نمونهٔ ۱. از بین ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز به چند طریـق می‌توان ۴ مهره انتخـاب کرد، به‌طوری که حداکثر ۳ مهره قرمز باشد؟

- **روش اول حـل:** همـهٔ حـالات ممکـن را در نظـر می‌گیریم و طبق «اصل جمع» کل حالات را می‌یابیم. حالات ممکن عبارت‌انـد از اینکه هر چهار مهره آبی باشد، یا سـه مهره آبی و یکی قرمز باشد، یا دو مهره آبی و دو مهره قرمز باشد و یا بالاخره اینکه یک مهره آبی و ۳ مهره قرمز باشد؛ یعنی:

$$\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}+\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۳}$$
$$=۵+۳۰+۳۰+۵=۷۰$$

بنابراین ۷۰ روش برای انجام این کار وجود دارد.

- **روش دوم حل:** کافی اسـت از ۸ مهرهٔ موجود تعداد راه‌هـای انتخاب چهار مهره را حسـاب کنیم؛ یعنی: C(۸,۴). بـا توجه به اینکه از ۸ مهرهٔ موجود، ۳ مهره قرمز است، در انتخاب $\binom{۸}{۴}$ واضح است که حداکثر ۳ مهره قرمز خواهد بود.

حاشـیه: این سـؤال در امتحان خرداد ۱۳۹۳ در یک کلاس ۳۱ نفره مطرح شد که تنها ۶ نفر معادل ۱۹ درصد به روش دوم حل اشاره کرده‌اند (۲ نفر از این ۶ نفر به هر دو روش مسـئله را حل کردند و ۱۹ نفر معادل ۶۱ درصد نیز مسئله را به روش نخست پاسخ دادند.)

نمونهٔ ۲. قرار اسـت ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند. به چند طریق ممکن است شخص B حتماً پس از شخص A صحبت کند؟ (نه لزوماً بلافاصله)

- **روش اول حل:** با استفاده از دو اصل شمارش ضرب و جمع حالات ممکن را پیدا می‌کنیم.

اگر A نفر نخست باشد، به ۲۴=۱×۲×۳×۴×۱ طریق،
اگر A نفر دوم باشـد، به ۱۸=۱×۲×۳×۱×۳ طریق،
اگر A نفر سـوم باشد، به ۱۲=۱×۱×۲×۲×۳ طریق،
و اگر A نفر چهارم باشد، به ۶=۱×۱×۱×۲×۳ طریق امکان‌پذیر است.

طبق اصل جمع، کل حالات ممکن ۶۰=۶+۱۲+۱۸+۲۴ حالت خواهد شد.

● **روش دوم حل:** وقتی قرار باشد ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند و ترتیب سخنرانی‌ها مهم باشد، کل حالات ممکن !۵، برابر ۱۲۰ حالت است. مسلم است، در نیمی از آن‌ها A قبل از B و در نیم دیگر A پس از B قرار می‌گیرد، پس:

کل حالات مطلوب $\frac{1}{2}\times 5!$، یعنی ۶۰ حالت است.

نمونهٔ ۳. از هر یک از شهرهای دوشنبه، دهلی نو، کابل، آنکارا و مسکو ۱۰ شرق‌شناس به «**سمینار حافظ‌شناسی**» در شیراز دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان با سه شرق‌شناس که غیرهم‌شهری هستند، مصاحبه کرد؟

● **روش اول حل:** ابتدا از ۵ شهر، ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر شهر یک نفر را از میان ۱۰ نفر برمی‌گزینیم؛ یعنی:

$$\binom{5}{3}\times 10\times 10\times 10 = 10\times 10^3 = 10^4$$

● **روش دوم حل:** ابتدا یک نفر را از مجموع ۵۰ نفر انتخاب می‌کنیم. سپس نفر دوم را از میان ۴۰ نفر بعدی و در انتها یک نفر را از میان ۳۰ نفر بعدی انتخاب می‌کنیم. چون ترتیب در انتخاب این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر !۳ (جایگشت‌های ۳ نفر) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\binom{50}{1}\binom{40}{1}\binom{30}{1}}{3!} = \frac{50\times 40\times 30}{3\times 2\times 1} = 10^4$$

● **روش سوم حل:** ابتدا از ۵ شهر ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم. از میان مجموع ۳۰ شرق‌شناس این سه شهر، برای انتخاب نفر اول ۳۰ انتخاب، برای انتخاب نفر دوم ۲۰ انتخاب و برای انتخاب نفر سوم ۱۰ انتخاب وجود دارد. چون ترتیب قرار گرفتن این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر !۳ تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\frac{\binom{5}{3}\times 30\times 20\times 10}{3!} = 10^4$$

نمونهٔ ۴. چند عدد سه رقمی با ارقام ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ می‌توان نوشت؟ (آزاد تجربی ـ ۸۹)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲
۳) ۱۸ ۴) ۳۰

● **روش اول حل:** فرض کنیم عدد ۳ رقمی شامل دو رقم ۱ و یک رقم ۲ یا ۳ باشد. به‌صورت: a11، 1a1 و 11a که a می‌تواند ۲ یا ۳ باشد و جمعاً ۶ حالت خواهد شد. اگر عدد شامل دو رقم ۲ و یک رقم ۱ یا ۳ باشد ۶ حالت و اگر عدد شامل دو رقم ۳ و یک رقم ۱ یا ۲ باشد نیز ۶ حالت داریم. همچنین، اگر ۳ رقم با ارقام غیرتکراری ۱، ۲ و ۳ باشد، به !۳ حالت، یعنی ۶ حالت خواهند بود که جمعاً ۲۴=۶×۴ حالت می‌شود.

● **روش دوم حل:** برخلاف روش اول، این روش بسیار کوتاه و دارای ابتکار جالبی است! برای عدد ۳ رقمی، ۳ جایگاه □□□ داریم. فرض کنیم در هر جایگاه بتوان هر کدام از عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشت. کل حالات ممکن ۳×۳×۳ برابر ۲۷ می‌شود. از این ۲۷ حالت، ۳ عدد ۳۳۳ و ۲۲۲ و ۱۱۱ را (که امکان وقوع ندارند) حذف می‌کنیم. پس ۳-۲۷، یعنی ۲۴ حالت خواهد شد.

نمونهٔ ۵. با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت، به این شرط که رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان بزرگ‌تر باشد؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

● **روش اول حل:** تعداد کل اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام فوق و بدون تکرار ارقام نوشت برابر است با: ۶۰=۳×۴×۵. اما با سه رقم متمایز a، b و c کلاً ۶ حالت abc، acb، bac، bca، cab و cba ایجاد می‌شود که فقط یکی از آن‌ها شرط بزرگ‌تر بودن رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان را داراست. یعنی بین ۶۰ حالت به تعدد $\frac{1}{6}(60)$ معادل ۱۰ حالت داریم که شرایط خواسته شده را دارند.

● **روش دوم حل:** استفاده از روش نمودار درختی است که طرح آن در کلاس درس، مناسب و جنبهٔ آموزشی دارد، اما کمی وقت‌گیر است.

● **روش سوم حل:** از هر ۳ رقم متمایزی که انتخاب می‌کنیم، تنها یک عدد سه‌رقمی با شرایط فوق

می‌توان نوشت.

بنابراین جواب مسئله برابر است با: $\binom{۵}{۳}=۱۰$.

نمونهٔ ۶. از دانشجویی که در امتحان تاریخ شرکت کرده، خواسته شده است که به هفت پرسش از ده پرسش تشریحی پاسخ دهد، به‌طوری که حداقل دوتای آن‌ها از پنج تای نخست برگزیده شوند. به چند طریق ممکن است؟

- **روش اول حل:** چهار حالت را باید در نظر گرفت. نخست اینکه دانشجو به دو تا از پنج پرسش نخست و هر پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $۱۰=۱۰\times۱=\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}$ طریق رخ می‌دهد. دوم اینکه دانشجو سه‌تا از پنج پرسش نخست و چهارتا از پنج پرسش آخر را برگزینند. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این به $۵۰=۵\times۱۰=\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}$ طریق رخ می‌دهد.

دیگر اینکه دانشجو تصمیم بگیرد که به چهارتا از پنج پرسش نخست و به سه‌تا از پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $۵۰=۱۰\times۵=\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}$ طریق می‌تواند رخ دهد. در نهایت اینکه دانشجو بخواهد به هر پنج پرسش نخست و به دوتا از پنج‌تای آخر پاسخ دهد که این نیز به $۱۰=۱۰\times۱=\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۵}$ طریق می‌تواند رخ دهد. با توجه به چهار حالت بالا و بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع می‌بینیم که این دانشجو می‌تواند

$$\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۵}+\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}$$
$$=۱۰+۵۰+۵۰+۱۰=۱۲۰$$

انتخاب هفت پرسش (از بین ۱۰تا) انجام دهد، به‌طوری که هر انتخاب شامل حداقل دوتا از پنج پرسش نخست باشد.

- **روش دوم حل:** هر انتخاب هفت پرسش از ۱۰ پرسش توسط دانشجو، مستلزم انتخاب دست‌کم دوتا پرسش از پنج‌تای نخست است که این به $۱۲۰=\binom{۱۰}{۷}$ طریق می‌تواند رخ دهد.

نمونهٔ ۷. ۶ نفر را به چند طریق می‌توان به ۲ تیم ۳ نفره تقسیم کرد؟

- **روش اول حل:** تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۶ نفر به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌تواند باشد. اما از آنجا که وقتی ۳نفر را به‌عنوان یک تیم انتخاب می‌کنیم، خودبه‌خود ۳ نفر باقی مانده تیم دیگر را تشکیل می‌دهند، لذا شمارش فوق دو برابر حالات ممکن است. یعنی پاسخ این مسئله برابر است با: $\frac{۱}{۲}\binom{۶}{۳}$ که برابر ۱۰ می‌شود.

- **روش دوم حل:** می‌توان این مسئله را به‌صورت دیگری نیز حل کرد. یکی از این ۶ نفر را (مثلاً a) در نظر می‌گیریم. a به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌تواند افراد هم‌تیمی خود را انتخاب کند و تیم مقابل به‌صورت یکتایی مشخص می‌شود. بنابراین پاسخ این پرسش برابر $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ طریق است.

نمونهٔ ۸. در چند درصد از جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ SALON، دو حرف S و A کنار هم هستند؟

- **روش اول حل:** ابتدا حرف‌های A، L، O و N را می‌چینیم. پس از اینکه این ۴ حرف در کنار هم قرار گرفتند، حرف S را قرار می‌دهیم. حرف S نسبت به این ۴ حرف می‌تواند در ۵ جای متفاوت قرار گیرد. چون می‌خواهیم S و A کنار هم باشد، پس فقط می‌تواند در دو طرف A باشد؛ یعنی ۲ حالت از ۵ حالت را می‌خواهیم. پس نسبت حالت‌ها می‌شود $\frac{۲}{۵}$، یعنی ۴۰ درصد.

- **روش دوم حل:** عملاً ۴ شیء داریم: N، O، L و SA (یا AS) لذا تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر است با: $۲\times۴!$ و تعداد کل هم که $۵!$ است. پس درصد موردنظر برابر است با: $۱۰۰\times\frac{۲\times۴!}{۵!}$ که برابر ۴۰ درصد می‌شود.